OM INTEGRATIONEN

AF

EN KLASS AF LINEÄRA DIFFERENTIALEKVATIONER MED DUBBELPERIODISKA KOEFFICIENTER, ANALOG MED DE S. K. HERMITE'SKA DIFFERENTIALEKVATIONERNA

AKADEMISK AFHANDLING

SOM MED TILLSTÅND AF

VIDTBERÖMDA FILOSOFISKA FAKULTETENS I UPSALA

MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIGA SEKTION

FÖR VINNANDE AF FILOSOFISK DOKTORSGRAD

TILL OFFENTLIG GRANSKNING FRAMSTÄLLES

ONSDAGEN DEN 12 MAJ 1897 KL. 10 F. M.

Å LÄROSALEN N:o XI

AF

MAGNUS MALMBORG

FILOSOFIE LICENTIAT AF GOTLANDS LANDSKAP.

UPSALA 1897

AKADEMISKA BOKTRYCKERIET

EDV. BERLING.

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

Problemet att finna den fullständiga integralen till en lineär, homogen differentialekvation, hvilkens koefficienter äro dubbelperiodiska funktioner af den oberoende variabeln, har haft aktuelt intresse, alltsedan LAMÉ i sina undersökningar »Sur l'équilibre des températures dans un ellipsoide à trois axes inégaux», Journal de Mathematiques, tome 4, 1839, framkommit till sin bekanta differentialekvation, som med WEIERSTRASS' beteckningssätt[1]) kan skrifvas

$$y'' = [n(n+1)\wp(u) + h]y$$

$$\{ y'' = [n(n+1)k^2 sn^2 x + h] y \} .$$

LAMÉ integrerar denna ekvation för vissa bestämda värden på h, då n antages vara ett helt tal.

Först omkring fyrtio år senare lyckas det HERMITE[2]) att integrera den LAMÉ'ska ekvationen, då h är ett godtyckligt tal[3]). Den härmed närbeslägtade BRIOSCHI'ska ekvationen

$$y'' = \left[\frac{n(n+2)}{4}\wp(u) + h\right]y$$

$$\left\{ y'' = \left[\frac{n(n+2)}{4}k^2 sn^2 x + h\right]y \right\}$$

---

[1]) Som vi i den följande framställningen komma att använda WEIERSTRASS' beteckningssätt för de elliptiska funktionerna, sådant det framställes i SCHWARZ, Formeln und Lehrsätze etc., HALPHEN, Traité des fonctions elliptiques samt APPELL et LACOUR, Principes de la théorie des fonctions elliptiques, och flerstädes, anföra vi hittills integrerade differentialekvationers form med JACOBIS beteckningar inom parentes.

[2]) HERMITE »Sur quelques applications des fonctions elliptiques», Comptes rendus de l'académie des sciences de Paris, 1877—1880.

[3]) En kompletterande undersökning är utförd af E. A. STENBERG, Acta Societ. Scient. Fennicæ Tom. XVI, 1886.

har på skilda vägar blifvit integrerad af honom sjelf[1]) och af Mittag-Leffler[2]). Här visar det sig dock, att h måste uppfylla ett visst bestämdt vilkor, för att den allmänna integralen må blifva regulär.

Sedermera hafva integrerbara typer af differentialekvationer af andra ordningen med dubbelperiodiska koefficienter blifvit framställda dels i sammanhang med fysiska och astronomiska problem såsom t. ex. den af Gyldén[3]) i sammanhang med tvåkropparproblemet integrerade ekvationen

$$y'' - \frac{3}{2}\frac{\wp'(u)}{\wp(u)-e_1}y' + 6e_1 y = 0$$

$$\left\{ y'' + 3k^2\frac{sn\,x\,cn\,x}{dn\,x}y' + 2(1+k'^2)y = 0 \right\},$$

dels ock i sammanhang med rent matematiska frågor såsom Picard's[4])

$$y'' - (n+1)\frac{\wp'(u)}{\wp(u)-e_\lambda}y' + \alpha y = 0$$

$$(\lambda = 1, 2, 3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' + 2(n+1)k^2\dfrac{sn\,x\,cn\,x}{dn\,x}y' + \alpha y = 0 \\[2ex] y'' + 2(n+1)\dfrac{sn\,x\,dn\,x}{cn\,x}y' + \alpha y = 0 \\[2ex] y'' - 2(n+1)\dfrac{cn\,x\,dn\,x}{sn\,x}y' + \alpha y = 0 \end{array} \right\},$$

Hermites[5]) generelare

$$y'' - (\nu+1)\frac{\wp'(u)}{\wp(u-e_\lambda)}y' = [(n-\nu)(n+\nu+1)\wp(u) + h]y$$

$$(\lambda = 1, 2, 3)$$

[1]) Annali di Matematica pura ed applicata, 2:dra serien tom. IX.

[2]) Öfversigt af K. Vetenskapsakademiens förhandlingar 1880, N:o 6, Stockholm.

[3]) Comptes rendus, maj 1879.

[4]) » » juli 1879.

[5]) » » febr. 1880.

$$\left\{\begin{array}{l} y'' + 2(\nu+1)\dfrac{k^2\,sn\,x\,cn\,x}{dn\,x}\,y' = \left[(n-\nu)(n+\nu+1)k^2\,sn^2x + h\right]y\,, \\[2ex] y'' + 2(\nu+1)\,\dfrac{sn\,x\,dn\,x}{cn\,x}\,y' = \left[(n-\nu)(n+\nu+1)k^2\,sn^2x + h\right]y\,, \\[2ex] y'' - 2(\nu+1)\,\dfrac{cn\,x\,dn\,x}{sn\,x}\,y' = \left[(n-\nu)(n+\nu+1)k^2\,sn^2x + h\right]y\,, \end{array}\right\}$$

der n och ν äro hela tal eller noll[1]), och

Darboux's[2]) ekvation

$$y'' = \left[\frac{\mu(\mu+1)(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{\wp(u)-e_1} + \frac{\mu'(\mu'+1)(e_2-e_3)(e_2-e_1)}{\wp(u)-e_2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu''(\mu''+1)(e_3-e_1)(e_3-e_2)}{\wp(u)-e_3} + n(n+1)\wp(u) + h\right]y\,;$$

$$\left\{ y'' = \left[\frac{\mu(\mu+1)}{sn^2x} + \frac{\mu'(\mu'+1)}{cn^2x}dn^2x + \frac{\mu''(\mu''+1)}{dn^2x}k^2sn^2x + \right.\right.$$

$$\left.\left. + n(n+1)k^2sn^2x + h\right]y\,,\right\}\,,$$

som han studerar, då μ, μ', μ'' och n äro hela tal.

Emellertid kunna alla hittills uppräknade ekvationer utom Brioschis sammanfattas i en differentialekvation af följande form

$$y'' - \left[\nu\frac{\wp'(u)}{\wp(u)-e_1} + \nu_1\frac{\wp'(u)}{\wp(u)-e_2} + \nu_2\frac{\wp'(u)}{\wp(u)-e_3}\right]y' =$$

$$= \left[\frac{(n_1-\nu)(n_1+\nu+1)(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{\wp(u)-e_1} + \frac{(n_2-\nu_1)(n_2+\nu_1+1)(e_2-e_1)(e_2-e_3)}{\wp(u)-e_2} + \right.$$

$$+ \frac{(n_3-\nu_2)(n_3+\nu_2+1)(e_3-e_1)(e_3-e_2)}{\wp(u)-e_3} +$$

$$\left. + (n+\nu+\nu_1+\nu_2)(n-\nu-\nu_1-\nu_2+1)\wp(u) + h\right]y\,;$$

---

[1]) Den sista af dessa ekvationer har sedan blifvit fullständigt behandlad af Elliot, Acta Mathematica 2, 1883.

[2]) Comptes rendus juni 1882.

$$\left\{\begin{aligned}
&y'' + \left[2\nu\frac{k^2 snx\, cnx}{dnx} + 2\nu_1\frac{snx\, dnx}{cnx} - 2\nu_2\frac{cnx\, dnx}{snx}\right]y' = \\
&= \left[\frac{1}{sn^2x}(n_3-\nu_2)(n_3+\nu_2+1) + \frac{dn^2x}{cn^2x}(n_2-\nu_1)(n_2+\nu_1+1) + \right. \\
&\left. + \frac{k^2sn^2x}{dn^2x}(n_1-\nu)(n_1+\nu+1) + k^2sn^2x(n+\nu+\nu_1+\nu_2)(n-\nu-\nu_1-\nu_2+1) + h\right]y
\end{aligned}\right.$$

framstäld och integrerad af SPARRE[1]), då ν, ν_1, ν_2 äro kvantiteter hvilka som helst, och n, n_1, n_2, n_3 äro hela tal eller noll.

Emellertid hafva äfven allmänna klasser af differentialekvationer med dubbelperiodiska koefficienter af hvilken ordning som helst blifvit framstälda och delvis integrerade. Sålunda erhåller HERMITE, utgående från egenskapen hos den dubbelperiodiska koefficienten

$$n(n+1)\wp(u) + h$$

i LAMÉS af honom fullständigt integrerade differentialekvation att icke hafva några andra oändlighetsställen än $u = 0$ och därmed kongruenta ställen samt från egenskapen hos den allmänna integralen till samma ekvation att vara af rationel karaktär, en klass af differentialekvationer, som MITTAG-LEFFLER[2]) benämner de HERMITE'*ska ekvationerna* och af hvilka han integrerar de olika typerna af till och med fjärde ordningen, då den allmänna integralen har $u = 0$ som enkelpol. Med en HERMITE'S differentialekvation af n:te ordningen förstår han »en lineär, homogen differentialekvation utaf denna ordning, hvars koefficienter äro dubbelperiodiska funktioner af den oberoende variabeln u, hvilka ha de båda fundamentalperioderna $2\omega, 2\omega'$, och hvilka bli oändliga alltid och endast för $u = 0$ och dermed kongruenta ställen, samt hvars allmänna integral är en funktion af rationel karaktär».

Vi skola nu, utgående från HERMITE'S undersökningar, framställa en ny klass af lineära differentialekvationer med dubbelperiodiska koefficienter analog med *de* HERMITE'*ska differentialekvationerna*[3]). HERMITE har nemligen i sin afhandling, Sur quelques applications des fonctions elliptiques[4]), framstält en allmän klass af lineära differentialekvationer med dubbelperiodiska

---

1) Acta Mathematica 3. 1883.

2) Acta Societ. Fennicæ. Tom. XII. 1883.

3) Sedan studerade af BRIOSCHI i Brioschi Ann. (2) XI.

4) Separat. Paris 1885.

koefficienter, af hvilken han endast integrerar den af andra ordningen.

$$y'' - \left[\frac{1}{2}\frac{\wp'(u)+\wp'(a)}{\wp(u)-\wp(a)} + \frac{1}{2}\frac{\wp'(u)+\wp'(b)}{\wp(u)-\wp(b)}\right]y' +$$

$$+\left[\frac{L}{2}\frac{\wp'(u)+\wp'(a)}{\wp(u)-\wp(a)} + \frac{M}{2}\frac{\wp'(u)+\wp'(b)}{\wp(u)-\wp(b)} + N\right]y = 0\,;$$

$$\left|\begin{array}{l} y'' - \left[\dfrac{sn\,a}{sn\,u\,sn(u-a)} + \dfrac{sn\,b}{sn\,u\,sn(u-b)}\right]y' + \\ \quad + \left[\dfrac{A\,sn\,a}{sn\,u\,sn(u-a)} + \dfrac{B\,sn\,b}{sn\,u\,sn(u-b)} + C\right]y = 0 \end{array}\right|$$

Denna allmänna klass af ekvationer erhåller han på följande sätt. Han utgår från antagandet att differentialekvationen af n:te ordningen eger ett fundamentalsystem af n partikulära integraler, hvilka äro dubbelperiodiska funktioner af andra slaget med enkelpolen $u = 0$ och således äro af formen

$$f(u) = \frac{\sigma(u+v)}{\sigma(v)\,\sigma(u)}\,e^{(\varrho - \zeta(v))u}\ ^{1)}\ .$$

Beteckna nu med $f_i(u)$ värdet af $f(u)$, då vi i stället för v och ϱ sätta v_i och ϱ_i och kalla vidare de mot perioderna 2ω, $2\omega'$ svarande multiplikatorerna μ_i och μ'_i. Om vi då sätta

$$y = C_1 f_1(u) + C_2 f_2(u) + \ldots\ldots + C_n f_n(u)\ ,$$

der $C_1, C_2 \ldots C_n$ äro arbiträra konstanter, så är den lineära, homogena differentialekvation af n:te ordningen, som har detta uttryck till fullständig integral, af formen

$$\left|\begin{array}{llll} y\ , f_1(u)\ , & f_2(u)\ , & \ldots\ldots & , f_n(u) \\ y'\ , f'_1(u)\ , & f'_2(u)\ , & \ldots\ldots & , f'_n(u \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y^{(n)}\ , f^{(n)}(u)\ , & f_2^{(n)}(u)\ , & \ldots & , f_n^{(n)}(u) \end{array}\right| = 0\,;$$

ofvanstående determinant kan också skrifvas

$$\varphi_0(u)\,y^{(n)} + \varphi_1(u)\,y^{(n-1)} + \ldots\ldots + \varphi_n(u)\,y\ .$$

[1]) $\zeta(u) = \dfrac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}$ enligt beteckningssättet i Halphen, Traité des fonctions elliptiques, I, Paris 1886.

Här äro koefficienterna $\varphi(u)$ tydligen dubbelperiodiska funktioner af andra slaget med multiplikatorerna $\mu_1\ \mu_2 \ldots . \mu_n$ och $\mu'_1\ \mu'_2 \ldots . \mu'_n$. Vidare är $u = 0$ en n-faldig pol till $\varphi_0(u)$ samt en $(n+1)$-faldig pol till $\varphi_1(u),\ \varphi_2(u) \ldots . \varphi_n(u)$. Följaktligen kunna dessa koefficienter skrifvas

$$\varphi_0(u) = \frac{G_0\,\sigma(u-a_1)\sigma(u-a_2) \ldots . \sigma(u-a_n)\,e^{r_0 u}}{\sigma_n(u)}\ ;$$

$$\varphi_i(u) = \frac{G_i\,\sigma(u-a_1^{(i)})\sigma(u-a_2^{(i)}) \ldots . \sigma(u-a_n^{(i)})\,\sigma(u-a_{n+1}^{(i)})e^{r_i u}}{\sigma^{n+1}(u)}$$

$$(i = 1\,, 2\,, 3\,, \ldots . n)\ .$$

Äro nu $a_1\,,\ a_2 \ldots . a_n$ alla olika, erhålla vi genom division med $\varphi_0(u)$

$$\text{(I)} \qquad y^{(n)} + \frac{\varphi_1(u)}{\varphi_0(u)}\,y^{(n-1)} + \ldots . . \frac{\varphi_n(u)}{\varphi_0(u)}\,y = 0\ ;$$

der koefficienterna tydligen äro dubbelperiodiska funktioner af första slaget med enkelpolerna $0\,,\ a_1\,,\ a_2 \ldots . a_n$ och således kunna skrifvas

$$\frac{\varphi_i(u)}{\varphi_0(u)} = \text{Const} + A_1^{(i)}\zeta(u-a_1) + A_2^{(i)}\zeta(u-a_2) + \ldots .$$

$$\ldots + A_n^{(i)}\zeta(u-a_n) + A_0^{(i)}\zeta(u)$$

der $(i = 1\,, 2\,, \ldots . n)$

$$A_0^{(i)} + A_1^{(i)} + A_2^{(i)} + \ldots . A_n^{(i)} = 0\ ;$$

Som ofvan är nämndt, har Hermite studerat denna klass af ekvationer endast för $n = 2$.

Antaga vi däremot, att

$$a_1 = a_2 = \ldots . . = a_n = r_0 = 0\ ,$$

så följer att

$$\varphi_0(u) = \text{konst.}\ ,$$

och vi erhålla de Hermite'ska ekvationerna, hvilka enligt Fuchs' undersökningar måste vara af formen

$$\text{(II)} \qquad y^{(n)} + \varphi_2(u)y^{(n-2)} + \ldots . . \varphi_n(u)y = 0\ ,$$

der

$$\varphi_2(u) = \alpha_0 + \alpha_1 \wp(u)$$

$$\varphi_3(u) = \beta_0 + \beta_1 \wp(u) + \beta_2 \wp'(u)$$

— — — — — — — —

$$\varphi_n(u) = \varkappa_0 + \varkappa_1 \wp(u) \, .\,.\,.\,.\,. \, \varkappa_{n-1} \wp^{(n-2)}(u)$$

$$\left(= \bar{\varkappa}_0 + \bar{\varkappa}_1 sn^2 x + \bar{\varkappa}_2 D_x sn^2 x + \, .\,.\,.\,.\,. \, \bar{\varkappa}_{n-1} D_x^{(n-2)} sn^2 x\right) .$$

Den LAMÉ'ska ekvationen hör således till denna klass och äfvenså den af PICARD[1]) först behandlade differentialekvationen af tredje ordningen

$$y''' + (h - 6\wp(u))\, y' + h_1 y = 0 ;$$

$$\left(y''' + (h - 6k^2 sn^2 x) y' + h_1 y = 0\right) .$$

Jag skall i det följande betrakta en tredje möjlighet i afseende på kvantiteterna $a_1, a_2 \ldots a_n$, ledande till en annan klass af lineära, homogena differentialekvationer med dubbelperiodiska koefficienter, och söka framställa de olika integrerbara typerna för $n = 2$ och $n = 3$.

Antaga vi nemligen, att i

$$\varphi_0(u) = \frac{G_0 \sigma(u - a_1)\, \sigma(u - a_2) \, .\,.\,.\,.\,. \, \sigma(u - a_n) e^{\alpha_0 u}}{\sigma^n(u)}$$

alla nollställena äro lika och sätta

$$a_1 = a_2 = \, .\,.\,.\,.\,. = a_n = a ,$$

så måste, på grund af att vi hafva

$$\varphi_1(u) = -\frac{d}{du} \varphi_0(u) ,$$

$(n-1)$ stycken af nollställena till $\varphi_1(u)$ vara $= a$. Om vi således på vanligt sätt upplösa kvoterna $\frac{\varphi_i(u)}{\varphi_0(u)}$ i deras enkla polelement, så erhålla vi en differentialekvation

$$y^{(n)} - \psi_1(u) \,.\, y^{(n-1)} + \psi_2(u) \,.\, y^{(n-2)} + \, .\,.\,.\,.\,. \, \psi_n(u) \,.\, y = 0$$

---

[1]) PICARD, Sur les équations differentielles à coefficients doublement périodiques, Journal von Crelle, Bd. 90, 1880.

der

$$\psi_1(u) = \alpha_0 + n\zeta(u-a) - n\zeta(u)$$

$$\psi_i(u) = \alpha_0^{(i)} + \alpha_1^{(i)}\zeta(u-a) + \alpha_2^{(i)}\wp(u-a) + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \alpha_n^{(i)}\wp^{(n-2)}(u-a) - \alpha_1^{(i)}\zeta(u)\,;$$

$$(i = 2\,, 3\,, \ldots\ldots n)\,.$$

Emedan den allmänna integralen är en funktion af rationel karaktär, måste emellertid enligt FUCHS' undersökningar $\psi_i(u)$ i omgifningen till $u = a$ kunna skrifvas

$$\psi_i(u) = \frac{\mathfrak{P}_{n-i}(u|a)}{(u-a)^i}\,, \quad (i = 1\,, 2\,, 3 \ldots . n)$$

der $\mathfrak{P}_{n-i}(u|a)$ äro vanliga potenserier af $(u-a)$. Men enligt det funna uttrycket på $\psi_i(u)$ är

$$(-1)^n\psi_i(u) = \frac{\alpha_n^{(i)}}{(u-a)^n} - \frac{\alpha_{n-1}^{(i)}}{(u-a)^{n-1}} + \ldots \pm \frac{\alpha_{i+1}^{(i)}}{(u-a)^{i+1}} \mp \frac{\alpha_i^{(i)}}{(u-a)^i} \pm \ldots$$

$$\ldots . + \frac{\alpha_1^{(i)}}{u-a} + \varepsilon_0 + \varepsilon_1(u-a) + \ldots .$$

och alltså måste

$$\alpha_n^{(i)} = \alpha_{n-1}^{(i)} = \ldots\ldots = \alpha_{i+1}^{(i)} = 0$$

för $i = 2\,, 3\,, \ldots . , (n-1)$.

Vi hafva således här en klass af lineära differentialekvationer med dubbelperiodiska koefficienter neml.

$$\text{(III)} \quad y^{(n)} - \psi_1(u)y^{(n-1)} + \psi_2(u)y^{(n-2)} + \ldots\ldots \quad \ldots + \psi_n(u)y = 0\,,$$

der koefficienterna hafva följande utseende

$$\psi_1(u) = \alpha_0 + n\zeta(u-a) - n\zeta(u)\,;$$

$$\psi_2(u) = \beta_0 + \beta_1\zeta(u-a) + \beta_2\wp(u-a) - \beta_1\zeta(u)\,;$$

$$\psi_3(u) = \gamma_0 + \gamma_1\zeta(u-a) + \gamma_2\wp(u-a) + \gamma_3\wp'(u-a) - \gamma_1\zeta(u)\,;$$

— — — — — — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — — — — — —

$$\psi_3(u) = \varkappa_0 + \varkappa_1\zeta(u-a) + \varkappa_2\wp(u-a) + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \varkappa_n\wp^{(n-2)}(u-a) - \varkappa_1\zeta(u)\,;$$

Det är att observera, att denna form på koefficienterna icke är något specialfall af formen (I) lika litet som de s. k. HERMITE'ska differentialekvationerna (II) äro det.

Vi observera vidare att, emedan hvarje funktion $f_i(u)$

$$f_i(u) = \frac{\sigma(u + v_i)}{\sigma(v_i)\sigma(u)} e^{(\varrho_i - \zeta(v_i))u}$$

innehåller tvenne arbiträra konstanter v_i och ϱ_i, så måste differentialekvationen (I) innehålla $2n$, och således blir antalet arbiträra konstanter i (II) $= 2n - (n+1) = n - 1$ på grund af vilkoren

$$a_1 = a_2 = \ldots\ldots a_n = r_0 = 0 \,,$$

som ju äro $n + 1$ till antalet.

På samma sätt inses af de $(n-1)$ vilkoren

$$a_1 = a_2 = \ldots\ldots = a_n$$

att differentialekvationen (III) kommer att innehålla $n + 1$ arbiträra konstanter.

Det är denna klass (III) af lineära, homogena differentialekvationer med dubbelperiodiska koefficienter, som utgör föremålet för våra undersökningar.

Denna klass af differentialekvationer karaktäriseras nu af följande egenskaper:

1. den allmänna integralen är en funktion af rationel karaktär af variabeln u,
2. koefficienterna äro dubbelperiodiska funktioner af första slaget enligt HERMITES' definition med de primitiva perioderna 2ω, $2\omega'$,
3. dessa koefficienter hafva de oväsentligt singulära ställena $u = 0$ och $u = a$ samt med dessa kongruenta ställen och inga andra.

Vi skola nu studera de olika typerna af denna klass af andra och tredje ordningen under antagande, att $u = a$ är ett ställe *à apparençe singulière* enligt HERMITE's från WEIERSTRASS lånade benämning, och att den allmänna integralen har $u = 0$ såsom enkelt oändlighetsställe.

Allmänna formen för en differentialekvation af den betraktade klassen af andra ordningen är

$$(1) \qquad y'' - [\alpha_0 + 2\zeta(u-a) - 2\zeta(u)]y' + [\beta_0 + \beta_1\zeta(u-a) + \\ + \beta_2\wp(u-a) - \beta_1\zeta(u)]\,y = 0\ ,$$

hvilken också kan skrifvas

$$y'' - \left(\bar{\alpha}_0 + \frac{\wp'(u)+\wp'(a)}{\wp(u)-\wp(a)}\right)y' + \\ + \left(\bar{\beta}_0 + \beta_1\cdot\frac{1}{2}\,\frac{\wp'(u)+\wp'(a)}{\wp(u)-\wp(a)} + \beta_2\wp(u-a)\right)y = 0\ .$$

Antaga vi således att den allmänna integralen icke har några andra oväsentligt singulära ställen än det enkla: $u = 0$, så måste vår differentialekvation enligt PICARDS teorem[1]) nödvändigt ega minst en integral af formen

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad f(u) = \frac{\sigma(u+v)}{\sigma(v)\,\sigma(u)}\,e^{(\varrho-\zeta(v))u}$$

och vi skola nu söka bestämma v och ϱ så, att $y = f(u)$ blir en integral. Genom insättning af detta uttryck (2) på $f(u)$ i (1) erhålla vi i venstra membrum en dubbelperiodisk funktion af andra slaget med $u = 0$ såsom trefaldigt oändlighetsställe samt $u = a$ såsom dubbelt oändlighetsställe och med samma multiplikatorer som $f(u)$. Beteckna vi detta venstra membrum med $\Phi(u)$, så är nödvändigt

$$\Phi(u) = A_2 f''(u) + A_1 f'(u) + A f(u) + B_1 f'(u-a) + B f(u-a)\ .$$

Ty, emedan multiplikatorerna till $\Phi(u)$ tydligen icke kunna vara af formen $e^{h\omega}$ $e^{h\omega'}$, så kan det af MITTAG-LEFFLER[2]) behandlade fallet icke ifrågakomma.

Häraf följer nu, att

$$y = f(u)$$

är en integral till differentialekvationen (1), om

$$A_2 = A_1 = A = B_1 = B = 0\ .$$

---

[1]) PICARD, loc. cit.

[2]) Comptes rendus, jan. 1880.

För att erhalla uttrycken för dessa koefficienter göra vi följande serieutvecklingar omkring $u = 0$

$$f(u) = \frac{1}{u} + \varrho + [\varrho^2 - \wp(v)]\frac{u}{2!} + [\varrho^3 - 3\varrho\wp(v) - \wp'(v)]\frac{u^2}{3!} + \ldots,$$

hvaraf

$$f'(u) = -\frac{1}{u^2} + \frac{1}{2}[\varrho^2 - \wp(v)] + \frac{1}{3}[\varrho^3 - 3\varrho\wp(v) - \wp'(v)]u + \ldots\ldots$$

$$f''(u) = \frac{2}{u^3} + \frac{1}{3}[\varrho^3 - 3\varrho\wp(v) - \wp'(v)] + \ldots\ldots$$

och vidare, om $-\psi_1(u)$ och $\psi_2(u)$ betyda koefficienterna i (1),

$$-\psi_1(u) = \frac{2}{u} - (2\zeta(a) - \alpha_0) + 2\wp(a).u - \ldots\ldots\ldots$$

$$\psi_2(u) = -\frac{\beta_1}{u} + [\beta_0 - \beta_1\zeta(a) + \beta_2\wp(a)] - [\beta_1\wp(a) + \beta_2\wp'(a)]u + \ldots$$

Häraf följer omedelbart

$$(3) \quad \begin{cases} 2A_2 = 0\ ; \\ -A_1 = \alpha_0 - 2\zeta(a) - \beta_1\ ; \\ A = \varrho^2 - \wp(v) - 2\wp(a) + \beta_0 - \beta_1\zeta(a) + \beta_2\wp(a) - \beta_1\varrho\ . \end{cases}$$

Serieutvecklingarna omkring $u = a$

$$f(u) = f(a) + f'(a)(u - a) + \ldots.$$

$$f'(u) = f'(a) + f''(a)(u - a) + \ldots.$$

$$f''(u) = f''(a) + f'''(a)(u - a) + \ldots.$$

samt

$$-\psi_1(u) = -\frac{2}{u-a} + (2\zeta(a) - \alpha_0) - \ldots\ldots;$$

$$\psi_2(u) = \frac{\beta_2}{(u-a)^2} + \frac{\beta_1}{u-a} + \ldots\ldots;$$

gifva

$$(4) \quad .\ .\ .\ \begin{cases} -B_1 = \beta_2 f(a) \\ B = -2f'(a) + \beta_1 f(a) + \beta_2 f'(a)\ . \end{cases}$$

Vilkoren för att $y = f(u)$ skall vara en integral till (1) blifva således

$$(5)\quad \begin{cases} \alpha_0 - 2\zeta(a) - \beta_1 = 0 \\ \varrho^2 - \wp(v) - 2\wp(a) + \beta_0 - \beta_1\zeta(a) + \beta_2\wp(a) - \beta_1\varrho = 0 \\ \beta_2 f(a) = 0 \\ -2f'(a) + \beta_1 f(a) + \beta_2 f'(a) = 0\,. \end{cases}$$

Af den tredje af dessa ekvationer (5) följer, att vi antingen måste hafva $f(a) = 0$ eller $\beta_2 = 0$. Vi antaga då först

$$f(a) = 0\,,$$

d. v. s.

$$\frac{\sigma(a+v)}{\sigma(v)\sigma(a)} e^{(\varrho - \zeta(v))a} = 0\,,$$

hvaraf följer, att

$$v = -a\,.$$

Af den sista af ekvationerna (5) följer då, emedan $f'(a)$ tydligen måste vara skild från noll, att

$$\beta_2 = 2\,,$$

och vidare hafva vi enligt (5)

$$\beta_1 = \alpha_0 - 2\zeta(a)$$

$$\varrho^2 - \beta_1\varrho + \beta_0 - \wp(a) - \beta_1\zeta(a) = 0\,.$$

Vi hafva alltså funnit, att *differentialekvationen*

$$(6)\quad \begin{cases} y'' - [\alpha_0 + 2\zeta(u-a) - 2\zeta(u)]y' + [\beta_0 + (\alpha_0 - 2\zeta(a))\zeta(u-a) + \\ \qquad + 2\wp(u-a) - (\alpha_0 - 2\zeta a)\zeta(u)]y = 0 \end{cases}$$

har till fullständig integral

$$y = C_1 \frac{\sigma(u-a)}{\sigma(a)\sigma(u)} e^{(\varrho_1 + \zeta(a))u} + C_2 \frac{\sigma(u-a)}{\sigma(a)\sigma(u)} e^{(\varrho_2 + \zeta(a))u}$$

der ϱ_1 och ϱ_2 äro de begge rötterna till andragradsekvationen

$$(7)\qquad \varrho^2 - (\alpha_0 - 2\zeta a)\varrho + \beta_0 - \alpha_0\zeta(a) + 2\zeta^2(a) - \wp(a) = 0\,,$$

förutsatt att dessa rötter äro olika d. v. s. att discriminanten

$$(8) \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 4[\beta_0 - \wp(a)] + 4\zeta^2(a) - \alpha_0^2 \neq 0 \, .$$

Vi se således att differentialekvationen utom a innehåller två godtyckliga konstanter α_0 och β_0, endast underkastade den inskränkning, som innebäres i (8). Om vi nemligen antaga β_0 fullt arbiträr, så äro på sin höjd tvenne bestämda värden på α_0 förbjudna. Antaga vi däremot α_0 fullt arbiträr, så är endast ett värde på β_0 uteslutet. Med dessa inskränkningar hafva vi således 3 godtyckliga konstanter i vår differentialekvation, såsom vårt allmänna resonnemang i inledningen gifver vid handen [1]).

Antag emellertid att

$$(9) \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 4[\beta_0 - \wp(a)] + 4\zeta^2(a) - \alpha_0^2 = 0 \, ;$$

då är

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \frac{\alpha_0}{2} - \zeta(a) \, ,$$

och vi hafva alltid en partikulär integral

$$f_1(u) = \frac{\sigma(u-a)}{\sigma(a)\sigma(u)} e^{\frac{\alpha_0}{2} u} \, .$$

Kalla vi $f_2(u)$ en annan integral, som med $f_1(u)$ bildar fundamentalsystem, så är

$$f_2(u) = f_1(u) \int \frac{1}{f_1^2(u)} e^{\int \psi_1(u) du} \, . du$$

$$= f_1(u) \, . \, u \, ,$$

då vi icke åsyfta annat än en partikulär integral.

Vårt fundamentalsystem till (6) blir således i detta fall (9)

$$y = C_1 \frac{\sigma(u-a)}{\sigma(a)\sigma(u)} e^{\frac{1}{2}\alpha_0 u} + C_2 u \, . \frac{\sigma(u-a)}{\sigma(a)\sigma(u)} e^{\frac{1}{2}\alpha_0 u} \, ,$$

---

[1]) Vi hafva tacite uteslutit alla a-värden af formen $2k\omega + 2k'\omega'$, der k och k' äro hela tal eller noll, och antagit a vara ett ställe inom eller på den primitiva periodparalellogrammen, hvilket tydligen på grund af koefficienternas i differentialekvationen form icke vållar någon inskränkning. Sätta vi nemligen i (III) $a = 0$, så återkomma vi genom en enkel substitution till de HERMITE'ska ekvationerna.

hvilket uttryck på den allmänna integralen ju öfverensstämmer med FLOQUET's allmänna resultat i den grundläggande afhandlingen: Sur les equations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques, Annales de l'École Normale Supérieure 3. série, Tome 1, 1884.

Vi öfvergå därefter till det andra fallet, då

$$\beta_2 = 0 \ ;$$

då erhålla vi af ekvationerna (5)

$$(10) \ldots \begin{cases} \beta_1 = \alpha_0 - 2\zeta(a) \ ; \\ \varrho^2 - \beta_1 \varrho + \beta_0 - \beta_1 \zeta(a) - 2\wp(a) - \wp(v) = 0 \ ; \end{cases}$$

och, emedan

$$\frac{f'(a)}{f(a)} = \zeta(a + v) - \zeta(a) + \varrho - \zeta(v) \ ,$$

ekvationen

$$(11) \ \ldots\ldots \quad \varrho = \frac{1}{2}\alpha_0 - \zeta(a + v) + \zeta(v) \ .$$

Af (10) och (11) fås genom elimination af ϱ

$$(12) \ \ldots \quad 4\left[\wp(v + a) - \wp(a) + \zeta^2(a) + \beta_0\right] - \alpha_0^2 = 0 \ .$$

Betraktad som funktion af v är venstra membrum i (12) tydligen en dubbelperiodisk funktion af första slaget med perioderna 2ω, $2\omega'$ och dubbelpolen $v = -a$; denna funktion har då också tvenne nollställen v_1 och v'_2 inom den primitiva periodparalellogrammen. Vi kunna emellertid skrifva (12) på följande sätt

$$\wp(v + a) - \wp(s) = 0 \ ,$$

om vi sätta

$$(12') \ \ldots\ldots \quad \wp(a) - \zeta^2(a) - \beta_0 + \frac{\alpha_0^2}{4} = \wp(s) \ ,$$

hvadan nollställena till (12) kunna skrifvas

$$(13) \ \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} v_1 = -s - a \\ v_2 = s - a \ , \end{cases}$$

då v_2 är ett med v'_2 kongruent ställe. Dessa nollställen v_1, v_2 äro nu i allmänhet icke kongruenta d. v. s. v_1 och v'_2 äro i allmänhet

olika, och vi erhålla då af (11) de tvenne motsvarande ϱ-värdena ϱ_1 och ϱ_2.

För att v_2 skall vara kongruent med v_1 är emellertid nödvändigt och tillräckligt att

$$s = p\,\omega + q\,\omega' = \tilde{\omega}\ , \qquad (p\,,\ q \text{ hela tal})$$

dervid vi observera, att p och q icke kunna samtidigt vara jemna hela tal på grund af definitionen på $\wp(s)$ genom (12').

Om således

$$(14) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \wp(a) - \zeta^2(a) - \beta_0 + \frac{\alpha_0^2}{4} =|= \wp(\tilde{\omega})$$

så har *differentialekvationen*

$$y'' - \left[a_0 + 2\,\zeta(u-a) - 2\,\zeta(u)\right]y' + \left[\beta_0 + (\alpha_0 - 2\,\zeta(a))\zeta(u-a) - \right.$$
$$\left. - (\alpha_0 - 2\,\zeta(a))\,\zeta(u)\right]y = 0$$

till fullständig integral

$$y = C_1\,\frac{\sigma(u+v_1)}{\sigma(v_1)\,\sigma(u)}\,e^{[\varrho_1 - \zeta(v_1)]u} + C_2\,\frac{\sigma(u+v_2)}{\sigma(v_2)\,\sigma(u)}\,e^{[\varrho_2 - \zeta(v_2)]u}\ ,$$

der v_1, v_2, ϱ_1, ϱ_2 beräknas ur (12) och (11).

Vi hafva således äfven här trenne godtyckliga konstanter a, α_0, β_0, endast underkastade vilkoret (14). Såsom specialfall erhålla vi genom att sätta $a = \omega$, ω', ω'' och $\alpha_0 = 2\,\zeta(a)$ successivt de PICARD'ska ekvationerna [1])

$$y'' - \frac{\wp'(u)}{\wp(u) - e_\lambda}\,y' + \beta_0\,y = 0$$

$$(\lambda = 1\,,\ 2\,,\ 3)\ .$$

Antag nu emellertid, att

$$(15) \quad . \quad . \quad . \quad \wp(a) - \zeta^2(a) - \beta_0 + \frac{\alpha_0^2}{4} = \wp(\omega_\lambda)\ ,\ ^{2)}$$

$$(\lambda = 1\,,\ 2\,,\ 3)$$

då är

$$v = \quad a \quad \omega_\lambda$$

---

[1]) Comptes rendus juli 1879.

[2]) Enligt beteckningen i SCHWARZ, Formeln und Lehrsätze, innebär detta således icke någon inskränkning.

och vi hafva alltid en partikulär integral

$$f_1(u) = \frac{\sigma(u - a - \omega_\lambda)}{\sigma(a + \omega_\lambda)\sigma(u)} e^{[\frac{1}{2}\alpha_0 + \zeta(\omega_\lambda)]u} .$$

Kalla vi liksom förut $f_2(u)$ en partikulär integral, som med $f_1(u)$ bildar fundamentalsystem, så kunna vi sätta

$$-\sigma^2(\omega_\lambda)\sigma^2(a + \omega_\lambda) f_2(u) = f_1(u) \int \frac{1}{f_1^2(u)} e^{\int \psi_1(u) du} du$$

hvaraf

$$f_2(u) = -f_1(u) \int \frac{\sigma^2(u - a)}{\sigma^2(\omega_\lambda)\sigma^2(u - a - \omega_\lambda)} e^{-2\eta_\lambda u} du$$

då

$$\eta_\lambda = \zeta(\omega_\lambda) .$$

Genom serieutveckling omkring $u = a + \omega_\lambda$ fås nu

$$\frac{\sigma^2(u - a - \omega_\lambda)}{\sigma^2(\omega_\lambda)\sigma^2(u - a)} e^{-2\eta_\lambda u} = \frac{1}{(u - a - \omega_\lambda)^2} + \left(\frac{\sigma''(\omega_\lambda)}{\sigma(\omega_\lambda)} + 3\eta_\lambda^2\right) + \ldots$$

och emedan, som lätt synes, uttrycket i venstra membrum är en dubbelperiodisk funktion af första slaget, så är

$$\frac{\sigma^2(u - a)}{\sigma^2(\omega_\lambda)\sigma^2(u - a - \omega_\lambda)} e^{-2\eta_\lambda u} = \wp(u - a - \omega_\lambda) - K(\omega_\lambda) ,$$

då vi sätta

$$-K(\omega_\lambda) = \frac{\sigma''(\omega_\lambda)}{\sigma(\omega_\lambda)} + 3\eta_\lambda ,$$

hvaraf

$$f_2(u) = f_1(u)\left[\zeta(u - a - \omega_\lambda) + K(\omega_\lambda) . u\right] .$$

Den allmänna integralen till differentialekvationen

$$y'' - \left[\alpha_0 + 2\zeta(u - a) - 2\zeta(u)\right] y' + \left[\beta_0 + (\alpha_0 - 2\zeta(a))\zeta(u - a) - \right.$$
$$\left. - (\alpha_0 - 2\zeta(a))\zeta(u)\right] y = 0$$

är således, då konstanterna a, α_0, β_0 satisfiera vilkorsekvationen (15), *uttryckt genom*

$$y = \frac{\sigma(u - a - \omega_\lambda)}{\sigma(a + \omega_\lambda)\sigma(u)} e^{[\frac{1}{2}\alpha_0 + \zeta(\omega_\lambda)]u} \times \left[C_1 + C_2\{\zeta(u - a - \omega_\lambda) + K(\omega_\lambda) . u\}\right] .$$

Vi hafva här således återigen ett specielt exempel på FLOQUET's allmänna resultat i Annales de l'École Normale Supérieure. 3 série, 1884.

Det fins således tvenne integrerbara typer af andra ordningen af den betraktade klassen (III) af differentialekvationer under förutsättning, att den allmänna integralen har det enda oväsentligt singulära stället $u = 0$ inom eller på den primitiva periodparalellogrammen.

Vi öfvergå härpå till framställningen af de olika typerna af tredje ordningen af klassen (III). Den allmänna formen för en sådan ekvation är

$$(16)\quad \begin{cases} y''' - [\alpha_0 + 3\zeta(u-a) - 3\zeta(u)]\,y'' + [\beta_0 + \beta_1\zeta(u-a) + \\ \quad + \beta_2\wp(u-a) - \beta_1\zeta(u)]\,y' + [\gamma_0 + \gamma_1\zeta(u-a) + \\ \quad + \gamma_2\wp(u-a) + \gamma_3\wp'(u-a) - \gamma_1\zeta(u)]\,y = 0 \end{cases}$$

eller

$$y''' - \left[\bar{\alpha}_0 + \frac{3}{2}\,\frac{\wp'(u) + \wp'(a)}{\wp(u) - \wp(a)}\right] y'' +$$

$$+ \left[\bar{\beta}_0 + \beta_1 \cdot \frac{1}{2}\,\frac{\wp'(u) + \wp'(a)}{\wp(u) - \wp(a)} + \beta_2\wp(u-a)\right] y' +$$

$$+ \left[\bar{\gamma}_0 + \frac{\gamma_1}{2}\,\frac{\wp'(u) + \wp'(a)}{\wp(u) - \wp(a)} + \gamma_2\wp(u-a) + \gamma_3\wp'(u-a)\right] y = 0\ .$$

Antaga vi liksom nyss, att den allmänna integralen har det enda oväsentligt singulära stället $u = 0$ inom eller på den primitiva periodparalellogrammen, så måste vi hafva en integral, som är en dubbelperiodisk funktion af andra slaget och således af formen

$$(17)\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ f(u) = \frac{\sigma(u+v)}{\sigma(v)\sigma(u)}\, e^{(\varrho - \zeta(v))u}\ .$$

Genom insättning af denna funktion (17) i (16) erhålla vi i venstra membrum en dubbelperiodisk funktion af andra slaget med $u = 0$ såsom fyrfaldig pol och $u = a$ såsom trefaldig pol samt

med samma multiplikatorer som $f(u)$. Betecknas detta venstra membrum med $\Phi(u)$, så är

$$\Phi(u) = Af(u) + A_1 f'(u) + A_2 f''(u) + A_3 f'''(u) + Bf(u-a) +$$
$$+ \beta_1 f'(u-a) + \beta_2 f''(u-a)$$

och $y = f(u)$ är en integral till (16), om $\Phi(u)$ id. $= 0$, d. v. s. om

$$A = A_1 = A_2 = A_3 = B = B_1 = B_2 = 0 \, .$$

Af serieutvecklingarna omkring $u = 0$ af koefficienterna i (16), som vi benämna $-\psi_1(u)$, $\psi_2(u)$ och $\psi_3(u)$,

$$-\psi_1(u) = \frac{3}{u} - [\alpha_0 - 3\zeta(a)] + 3\wp(a) \, . \, u - \frac{3\wp'(a)}{2} u^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\psi_2(u) = -\frac{\beta_1}{u} + [\beta_0 - \beta_1 \zeta(a) + \beta_2 \wp(a)] - [\beta_1 \wp(a) + \beta_2 \wp'(a)] u + \ldots$$

$$\psi_3(u) = -\frac{\gamma_1}{u} + [\gamma_0 - \gamma_1 \zeta(a) + \gamma_2 \wp(a) - \gamma_3 \wp'(a)] - \ldots\ldots\ldots$$

och af

$$f(u) = \frac{1}{u} + \varrho + [\varrho^2 - \wp(v)] \frac{u}{2!} + [\varrho^3 - 3\varrho\wp(v) - \wp'(v)] \frac{u^2}{3!} + \ldots\ldots$$

$$f'(u) = \quad \frac{1}{u^2} + \frac{1}{2} [\varrho^2 - \wp(v)] \ldots\ldots$$

$$f''(u) = \frac{2}{u^3} + \frac{1}{3} [\varrho^3 \quad 3\varrho\wp(v) - \wp'(v)] + \ldots\ldots$$

$$f'''(u) = -\frac{6}{u^4} + \ldots\ldots$$

fås

$$(18) \quad \begin{cases} -3!\, A_3 = 0 \\ 2!\, A_2 = \beta_1 - 2[\alpha_0 - 3\zeta(a)] \\ -A_1 = 6\wp(a) - \beta_0 + \beta_1 \zeta(a) - \beta_2 \wp(a) \quad \gamma_1 \\ A = -3\wp'(a) + \varrho^3 - 3\varrho\wp(v) - \wp'(v) + \beta_1 \wp(a) + \beta_2 \wp'(a) - \\ \quad - \frac{\beta_1}{2} [\varrho^2 - \wp(v)] + \gamma_0 - \gamma_1 \zeta(a) + \gamma_2 \wp(a) - \gamma_3 \wp'(a) - \gamma_1 \varrho \end{cases}$$

Vidare gifva serieutvecklingarna omkring $u = a$

$$-\psi_1(u) = -\frac{3}{u-a} - [a_0 - 3\zeta(a)] \quad \ldots\ldots$$

$$\psi_2(u) = \frac{\beta_2}{(u-a)^2} + \frac{\beta_1}{u-a} + \ldots\ldots$$

$$\psi_3(u) = -\frac{2\gamma_3}{(u-a)^3} + \frac{\gamma_2}{(u-a)^2} + \frac{\gamma_1}{u-a} + \ldots\ldots$$

och

$$f(u) = f(a) + f'(a)(u-a) + \frac{f''(a)}{2!}(u-a)^2 \ldots\ldots$$

$$f'(u) = f'(a) + f''(a)(u-a) + \ldots\ldots$$

$$f''(u) = f''(a) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f'''(u) = f'''(a) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

följande uttryck på koefficienterna B_2, B_1 och B

$$(19)\quad \begin{cases} 2!\,B_2 = -2\gamma_3 f(a) \\ -B_1 = \beta_2 f'(a) + \gamma_2 f(a) - 2\gamma_3 f'(a) \\ B = -3f''(a) + \beta_1 f'(a) + \beta_2 f''(a) + \gamma_1 f(a) + \gamma_2 f'(a) - \gamma_3 f''(a). \end{cases}$$

Vilkoren för att

$$y = f(u)$$

skall vara en integral till (16) blifva således

$$(20)\quad \begin{cases} \beta_1 = 2[a_0 - 3\zeta(a)] \\ \gamma_1 = (6-\beta_2)\wp(a) + \beta_1\zeta(a) - \beta_0 \\ \varrho^3 - \frac{\beta_1}{2}\varrho^2 - [3\wp(v) + \gamma_1]\varrho + \\ +(\beta_2 - \gamma_3 - 3)\wp'(a) - \wp'(v) + (\beta_1 + \gamma_2)\wp(a) + \frac{\beta_1}{2}\wp(v) - \gamma_1\zeta(a) + \gamma_0 = 0\ ; \end{cases}$$

och

$$(21)\quad \begin{cases} \gamma_3 f(a) = 0 \\ (\beta_2 - 2\gamma_3)f'(a) + \gamma_2 f(a) = 0 \\ (\beta_2 - \gamma_3 - 3)f''(a) + (\beta_1 + \gamma_2)f'(a) + \gamma_1 f(a) = 0\ . \end{cases}$$

Vi antaga nu först, på grund af den första af ekvationerna (21), att

$$f(a) = 0$$

d. v. s.

$$v = -a ;$$

då hafva vi af (20) och (21)

$$(22) \quad \begin{cases} \beta_1 = 2\left[\alpha_0 - 3\zeta(a)\right] , \\ \beta_2 = 2\gamma_3 \\ \gamma_1 = (6 - 2\gamma_3)\wp(a) + \beta_1\zeta(a) - \beta_0 , \\ \varrho^3 - \frac{\beta_1}{2}\varrho^2 - \left[3\wp(a) + \gamma_1\right]\varrho + \\ \qquad + (\gamma_3 - 2)\wp'(a) + \left(\frac{3\beta_1}{2} + \gamma_2\right)\wp(a) - \gamma_1\zeta(a) + \gamma_0 = 0 \end{cases}$$

och

$$\beta_1 + \gamma_2 = (3 - \gamma_3)\frac{f''(a)}{f'(a)} .$$

För att erhålla $\frac{f''(a)}{f'(a)}$ utgå vi ifrån

$$(23) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad f(u = \frac{\sigma(u-a)}{\sigma(a)\,\sigma(u)}\, e^{(\varrho + \zeta(a))u} ,$$

hvaraf

$$f'(u) = \left[\frac{1}{2}\,\frac{\wp'(u) + \wp'(a)}{\wp(u) - \wp(a)} + \varrho\right] f(u)$$

och få genom logaritmisk differentiation

$$\frac{f''(u)}{f'(u)} = \frac{2\wp(u) + \varrho\,\frac{\wp'(u) + \wp'(a)}{\wp'(u) - \wp(a)} + \varrho^2 + \wp(a)}{\frac{1}{2}\,\frac{\wp'(u) + \wp'(a)}{\wp(u) - \wp(a)} + \varrho} ,$$

Således blir

$$\frac{f''(a)}{f'(a)} = 2\varrho$$

och

(24) . . . . $\gamma_2 = 2\varrho(3 - \gamma_3) - \beta_1$;

Emedan denna ekvation entydigt bestämmer ϱ såsom funktion af differentialekvationens koefficienter, måste således

(25) . . . . $\gamma_3 = 3$,

för att differentialekvationen (16) skall hafva ett fundamentalsystem af partikulära integraler af formen (23). Nu blir således

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} \beta_1 &= 2\left[\alpha_0 - 3\zeta(a)\right] , \\ \beta_2 &= 6 , \\ \gamma_1 &= \beta_1 \zeta(a) - \beta_0 , \\ \gamma_2 &= -\beta_1 . \end{aligned} \right.$$

Med stöd af ekvationerna (25), (26) och den sista af ekvationerna (22) hafva vi alltså, att

Differentialekvationen

$$(26\text{ a}) \left\{ \begin{aligned} & y''' - \left[\alpha_0 + 3\zeta(u-a) - 3\zeta(u)\right] y'' + \left[\beta_0 + 2\left(\alpha_0 - 3\zeta(a)\right)\zeta(u-a) + \right. \\ & \quad + 6\wp(u-a) - 2\left(\alpha_0 - 3\zeta(a)\right)\zeta(u)\big] y' + \left[\gamma_0 - \left(\beta_0 - 2\alpha_0\zeta(a) + \right.\right. \\ & \quad + 6\zeta^2(a)\big)\zeta(u-a) - 2\left(\alpha - 3\zeta(a)\right)\wp(u-a) + \\ & \quad + 3\wp'(u-a) + \left(\beta_0 - 2\alpha_0\zeta(a) + 6\zeta^2(a)\right)\zeta(u)\big] y = 0 ; \end{aligned} \right.$$

har till fullständig integral

$$y = \frac{\sigma(u-a)}{\sigma(a)\sigma(u)} e^{\zeta(a)u} \cdot \left[C_1 e^{\varrho_1 u} + C_2 e^{\varrho_2 u} + C_3 e^{\varrho_3 u}\right] ,$$

der ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 äro de tre rötterna till ekvationen

$$(27) \left\{ \begin{aligned} & \varrho^3 - \left[\alpha_0 - 3\zeta(a)\right]\varrho^2 - \left[3\wp(a) - 6\zeta^2(a) + 2\alpha_0\zeta(a) - \beta_0\right]\varrho + \\ & \quad + \wp'(a) + \left[\alpha_0 - 3\zeta(a)\right]\wp(a) + 6\zeta^3(a) - 2\alpha_0\zeta^2(a) + \beta_0\zeta(a) + \gamma_0 = 0 \end{aligned} \right.$$

förutsatt att dessa rötter äro olika d. v. s. att discriminanten

$$\Delta \neq 0 .$$

För en ekvation af tredje graden

$$(28) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varrho^3 + 3a_1\varrho^2 + 3a_2\varrho + a_3 = 0 \,,$$

är

$$(29) \quad . \quad . \quad . \quad \Delta = 27\left(a_3^2 + 4a_2^3 - 6a_1a_2a_3 + 4a_1^3a_3 - 3a_1^2a_2^2\right) \,;$$

sätta vi således

$$(30) \quad \begin{cases} 3a_1 = -\left[\alpha_0 - 3\zeta(a)\right] \\ 3a_2 = -\left[3\wp(a) - 6\zeta^2(a) + 2\alpha_0\zeta(a) - \beta_0\right] \\ a_3 = \wp'(a) + \left[\alpha_0 - 3\zeta(a)\right]\wp(a) + 6\zeta^3(a) - 2\alpha_0\zeta^2(a) + \beta_0\zeta(a) + \gamma_0 \end{cases}$$

så blir vilkoret för att (27) skall ha olika rötter

$$\begin{aligned} &4\left[\alpha_0 - 3\zeta(a)\right]^4\left[\wp(a) - \zeta^2(a)\right] + \\ &+ 4\left[\alpha_0 - 3\zeta(a)\right]^3\left[\wp'(a) + 12\zeta(a)\wp(a) - 10\zeta^3(a) + \gamma_0\right] + \\ &+ \left[\alpha_0 - 3\zeta(a)\right]^2\left[36\wp^2(a) - 108\zeta^4(a) + 144\zeta^2(a)\wp(a) + 24\beta_0\zeta^2(a) + \right. \\ &\qquad\qquad \left. + 36\zeta(a)\wp'(a) - 24\beta_0\wp(a) + 36\gamma_0\zeta(a) - \beta_0^2\right] + \\ &+ 2\left[\alpha - 3\zeta(a)\right]\left[54\zeta^2(a)\wp'(a) + 36\zeta(a)\wp(a)\left(3\wp(a) - 2\beta_0\right) + \right. \\ &\qquad\qquad \left. + 54\beta_0\zeta^3(a) - 9\beta_0\left[\wp'(a) + \gamma_0\right] + 54\gamma_0\zeta^2(a) + 3\beta_0^2\zeta(a)\right] - \\ &- 27\left[2\beta_0\zeta(a)\wp'(a) + 2\gamma_0\wp'(a) + \beta_0^2\zeta^2(a) + 4\beta_0\wp^2(a) - g_2\wp(a) + 2\beta_0\gamma_0\zeta(a)\right] + \\ &\qquad\qquad + 36\beta_0^2\wp(a) + 27(g_3 - \gamma_0^2) - 4\beta_0^3 \neq 0 \,; \end{aligned}$$

Denna discriminant är af fjärde graden i afseende på α_0, af tredje graden i afseende på β_0 och af andra graden i afseende på γ_0. Om vi således antaga β_0 och γ_0 fullkomligt godtyckliga, så äro på sin höjd fyra speciella värden på α_0 förbjudna; antaga vi α_0 och γ_0 fullkomligt godtyckliga, så äro på sin höjd tre speciella värden på β_0 förbjudna; och antaga vi slutligen α_0 och β_0 fullkomligt godtyckliga, så är endast två speciella värden på γ_0 förbjudna.

Antag emellertid att discriminanten till ekvationen (27) är $= 0$. Då kunna tydligen följande tvenne fall inträffa:

I) Alla tre rötterna till (27) äro lika.

Det gemensamma värdet på dessa rötter är då

$$(31) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varrho = \frac{1}{3}\left(\alpha_0 - 3\zeta(a)\right) \,,$$

och vi hafva alltid en partikulär integral

$$f_1(u) = \frac{\sigma(u - a)}{\sigma(a)\sigma(u)} e^{\frac{1}{3}\alpha_0 u} ;$$

substituera vi då

$$(32) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad y = f_1(u) \int z\, du \, ,$$

så blir den transformerade differentialekvationen

$$z'' + \left[\beta_0 - \frac{1}{3}\alpha_0^2 - 3\wp(a) + 3\zeta^2(a)\right] z = 0 ;$$

Med användande af beteckningarne i (28) och (30) hafva vi emellertid, om vi sätta[1])

$$I'_{3,2} = a_2 - a_1^2$$

$$I'_{3,3} = a_3 - 3a_1 a_2 + 2a_1^3$$

$$I_{3,4} = a_3^2 + 4a_2^3 - 6a_1 a_2 a_3 + 4a_1^3 a_3 - 3a_1^2 a_2^2 \, ,$$

att

$$(33) \quad . \; . \quad I_{3,4} = 4I'^3_{3,2} + I'^2_{3,3} \, ,$$

och de trenne rötterna till (28) blifva

$$\varrho_1 = - a_1 + \left\{ \sqrt[3]{-\frac{I'_{3,3}}{2} - \frac{\sqrt{I_{3,4}}}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{I'_{3,3}}{2} + \frac{\sqrt{I_{3,4}}}{2}} \right\}$$

$$(34) \quad \varrho_2 = - a_1 + \left\{ \gamma \sqrt[3]{-\frac{I'_{3,3}}{2} - \frac{\sqrt{I_{3,4}}}{2}} + \gamma^2 \sqrt[3]{-\frac{I'_{3,3}}{2} + \frac{\sqrt{I_{3,4}}}{2}} \right\}$$

$$\varrho_3 = \quad a_1 - \left\{ \gamma^2 \sqrt[3]{-\frac{I'_{3,3}}{2} - \frac{\sqrt{I_{3,4}}}{2}} + \gamma \sqrt[3]{-\frac{I'_{3,3}}{2} + \frac{\sqrt{I_{3,4}}}{2}} \right\}$$

der γ och γ_2 betyda de komplexa kubikrötterna ur enheten, så att

$$\gamma = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \, , \quad \gamma^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \, .$$

[1]) Se A. BERGER, Om användning af invarianter och halfinvarianter vid lösningen af allmänna algebraiska equationer af de fyra lägsta graderna. Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1890. N:o 4 sid. 172 och 179 samt 185.

Af antagandet att alla tre rötterna äro lika och af (33) och (34) följer då att

$$I_{3,4} = I'_{3,3} = I'_{3,2} = 0 \ ,$$

och af den sista af dessa likheter, att

$$(35) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \beta_0 - \frac{1}{3}\alpha_0^2 - 3\wp(a) + 3\zeta^2(a) = 0 \ .$$

Den transformerade differentialekvationen blir således helt enkelt

$$z'' = 0 \ .$$

Ett fundamentalsystem af integraler till denna är

$$z = 2u \ , \text{ och } z = 1 \ ,$$

hvarför vi hafva funnit, att *den allmänna integralen till differentialekvationen* (26 a), då alla tre rötterna till ekvationen (27) äro lika, är[1])

$$(36) \quad . \quad . \quad . \quad y = \frac{\sigma(u-a)}{\sigma(a)\sigma(u)} e^{\frac{1}{3}\alpha_0 u} \left\{ C_1 + C_2 u + C_3 u^2 \right\} \ .$$

II) Endast två rötter till (27) äro lika.

Kalla vi deras gemensamma värde ϱ_0 samt den återstående roten ϱ'_0, så är enligt (34) och (33)

$$(37) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \left| \begin{array}{l} \varrho_0 = \frac{1}{3}\left[\alpha_0 - 3\zeta(a)\right] + \sqrt[3]{\frac{I'_{3,3}}{2}} \\ \varrho'_0 = \frac{1}{3}\left[\alpha_0 - 3\zeta(a)\right] - 2\sqrt[3]{\frac{I'_{3,3}}{2}} \end{array} \right.$$

där kubikroten uppfyller vilkoret

$$\left(\sqrt[3]{\frac{I'_{3,3}}{2}}\right)^2 = -I'_{3,2}$$

$$(38) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = -\frac{1}{3}\left[\beta_0 - \frac{1}{3}\alpha_0^2 - 3\wp(a) + 3\zeta^2(a)\right] \ldots . .$$

[1]) Vilkoren härför äro således, att ekvationerna $\varDelta = 0$ och (35) skola vara uppfylda. Härvid afskilja vi följande fall: 1) om vi antaga α_0 fullt arbiträr, så är β_0 entydigt bestämd genom (35) och γ_0 tvåtydigt genom $\varDelta = 0$; 2) om vi antaga β_0 fullt arbiträr, så är α_0 tvåtydigt bestämd ur (35) och γ_0 fyra-tydigt ur $\varDelta = 0$; 3) om vi antaga γ_0 fullt arbiträr, så är α_0 fyra-tydigt bestämd ur $\varDelta = 0$, och β_0 därefter fyratydigt ur (35).

Transformera vi nu vår differentialekvation (26 a) förmedelst substitutionen

$$y = f_0(u)\int z\,du\ ,$$

der

$$f_0(u) = \frac{\sigma(u-a)}{\sigma(a)\sigma(u)}\, e^{[\varrho_0 + \zeta(a)]u}\ ,$$

d. v. s. den mot ϱ_0 svarande partikulära integralen, så fås:

$$z'' + \left[3(\varrho_0 + \zeta(a)) - \alpha_0\right]z' + \left[3\varrho_0^2 - 2(\varrho_0 + \zeta(a))(\alpha_0 - 3\zeta(a)) - \right.$$

$$\left. - 3\wp(a) + \beta_0\right] z = 0$$

eller på grund af (37) och (38)

$$z'' + \left[3(\varrho_0 + \zeta(a)) - \alpha_0\right] z' = 0\ ;$$

De tvenne fundamentalintegralerna till denna,

$$z = 1 \text{ och } z = e^{-[3(\varrho_0 + \zeta a) - \alpha_0]u}$$

gifva, som lätt synes,

$$y = f_0(u)\,.\,u \text{ och } y = \frac{\sigma(u-a)}{\sigma(a)\sigma(u)}\, e^{(\varrho'_0 + \zeta(a))u},$$

den sista således sammanfallande med den mot roten ϱ'_0 svarande partikulära integralen, och vi hafva således funnit att *differentialekvationen* (26 a) i det sist behandlade fallet II) *har till fullständig integral*

$$y = \frac{\sigma(u-a)}{\sigma(a)\sigma(u)}\, e^{(\varrho_0 + \zeta(a))u} \times \{C_1 + C_2 u\} +$$

$$+ C_3 \frac{\sigma(u-a)}{\sigma(a)\sigma(u)}\, e^{(\varrho'_0 + \zeta(a))u}\ .$$

Återstår det fall, då $f(a) =|= 0$, men

(39) . . . . $\gamma_3 = 0$.

Vi erhålla då af (20) och (21) följande ekvationer

$$(40) \quad \begin{cases} \beta_1 = 2\left[\alpha_0 - 3\zeta(a)\right] \\ \gamma_1 = (6-\beta_2)\wp(a) + \beta_1\zeta(a) - \beta_0 \end{cases}$$

och, om vi för korthetens skull beteckna

$$\frac{1}{2}\frac{\wp'(v) - \wp'(a)}{\wp(v) - \wp(a)} = (v, a),$$

följande

$$(41) \begin{cases} \beta_2\left[\varrho + (v, a)\right] + \gamma_2 = 0 ; \\ (\beta_2 - 3)\varrho^2 + \left[\beta_1 + \gamma_2 + 2(\beta_2 - 3)(v, a)\right]\varrho + \\ \qquad + (\beta_2 - 3)\left[2\wp(a) + \wp(v)\right] + (\beta_1 + \gamma_2)(v, a) + \gamma_1 = 0 ; \\ \varrho^3 - \frac{\beta_1}{2}\varrho^2 - \left[3\wp(v) + \gamma_1\right]\varrho + \\ \qquad + (\beta_2 - 3)\wp'(a) - \wp'(v) + (\beta_1 + \gamma_2)\wp(a) + \\ \qquad + \frac{\beta_1}{2}\wp(v) - \gamma_1\zeta(a) + \gamma_0 = 0 . \end{cases}$$

Genom elimination af ϱ ur de begge första af dessa ekvationer (41) fås nu emellertid följande relation

$$(42) \quad \beta_2^2(\beta_2 - 3)\wp(v + a) - \beta_2^2(\beta_2 - 3)\wp(a) + \beta_1\beta_2\gamma_2 - \beta_2^2\gamma_1 + 3\gamma_2^2 = 0.$$

Emedan denna ekvation satisfieras af endast tvenne v-värden, så måste vi antingen hafva $\beta_2 = 0$ eller $\beta_2 = 3$, för att den allmänna integralen skall vara af den begärda formen. Antag då först

$$\beta_2 = 0 ,$$

då måste på grund af (42) äfven

$$\gamma_2 = 0$$

och vidare på grund af (40)

$$\gamma_1 = 6\wp(a) + \beta_1\zeta(a) - \beta_0 .$$

Den första af ekvationerna (41) blir nu identiskt satisfierad, och det återstår oss för bestämmande af ϱ och v ekvationerna:

$$(43) \quad \ldots\ldots \quad s_0\varrho^3 + s_1\varrho^2 + s_2\varrho + s_3 = 0 ;$$

och

$$(44) \quad \ldots\ldots\ldots \quad r_0\varrho^2 + r_1\varrho + r_2 = 0 ;$$

der

$$s_0 = 1$$

$$s_1 = -\frac{\beta_1}{2}$$

$$s_2 = -\left(3\wp(v) + \gamma_1\right)$$

$$s_3 = -\wp'(v) + \frac{\beta_1}{2}\wp(v) - \left(3\wp'(a) - \beta_1\wp a + \gamma_1\zeta(a) - \gamma_0\right)$$

och

$$r_0 = -3$$

$$r_1 = \beta_1 - 6(v, a)$$

$$r_2 = -3\wp(v) + \beta_1(v, a) - (6\wp a - \gamma_1) .$$

Vilkoret för att ekvationerna (43) och (44) skola hafva en rot gemensam är, att den SYLVESTER'ska determinanten:

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & s_3 & 0 \\ 0 & s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ r_0 & r_1 & r_2 & 0 & 0 \\ 0 & r_0 & r_1 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_0 & r_1 & r_2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Efter insättning af värdena på kvantiteterna s och r samt reducering erhålles följande form på detta vilkor

$$
(45)\quad \left\{
\begin{aligned}
&108\Big[2\wp^3(v) - (v,a)\wp(v)\wp'(v) + 2(v,a)\wp'(v)\wp(v+a) - \\
&\quad - \wp(a)(v,a)\wp'(v) - 3\wp^2(v)\wp(v+a) + 3\wp(a)\wp^2(v) - \\
&\quad - 6\wp(a)\wp(v)\wp(v+a) + \left(3\wp^2(a) - \frac{g_2}{4}\right)\wp(v)\Big] + \\
&+ \Big[\beta_1^3 + 18\beta_1\gamma_1 + 108\big(3\wp'(a) - \beta_1\wp(a) + \gamma_1\zeta(a) - \gamma_0\big)\Big]\cdot\Big[\frac{\wp'(v)}{2} - \\
&\qquad\qquad - (v,a)\wp(v) + 2(v,a)\wp(v+a) - \wp(a)(v,a)\Big] + \\
&+ \left[\frac{\beta_1^4}{4} + 6\beta_1^2\gamma_1 - 18\beta_1^2\wp(a) - 216\gamma_1\wp(a) + 36\gamma_1^2\right]\wp(v+a) + \\
&+ \left(\frac{\beta_1^4}{4} + 6\beta_1^2\gamma_1\right)\wp(a) - 9(\beta_1^2 + 12\gamma_1 - 4\gamma_1^2)\wp^2(a) + 216\wp^3(a) + \\
&+ 27\left[3\wp'(a) - \beta_1\wp(a) + \gamma_1\zeta(a) - \gamma_0\right]^2 + \\
&+ \left(\frac{\beta_1^3}{2} + 9\beta_1\gamma_1\right)\left[3\wp'(a) - \beta_1\wp(a) + \gamma_1\zeta(a) - \gamma_0\right] + \\
&\frac{\beta_1^2\gamma_1^2}{4} \quad 4\gamma_1^3 \quad 27g_3 = 0 .
\end{aligned}
\right.
$$

Vid serieutveckling omkring $v = 0$ finner man emellertid att $v = 0$ är ett regulärt ställe till venstra membrum, betraktadt såsom en dubbelperiodisk funktion af v, och ekvationen (45) antager den enklare formen

$$
(46)\quad . \quad . \quad K_0 + K_1\wp(v+a) - \frac{1}{2}K_2\wp'(v+a) = 0 ,
$$

der K_0, K_1, K_2 äro resp. den konstanta termen och koefficienterna för $\frac{1}{(v+a)^2}$ och $\frac{1}{(v+a)^3}$ i serieutvecklingen omkring $v = -a$.

Dessa kvantiteter K hafva följande utseende

$$
\begin{aligned}
K_0 = {} & 540\wp^3(a) - 108\beta_1\wp(a)\wp'(a) + 18(\beta_1^2 - 6\gamma_1)\wp^2(a) + \\
& + 108(\gamma_1\zeta(a) - \gamma_0)\wp'(a) + (\beta_1^3 + 18\beta_1\gamma_1)\wp'(a) - \\
& 54\beta_1(\gamma_1\zeta(a) - \gamma_0)\wp(a) - \left(\frac{\beta_1^4}{4} + 3\beta_1^2\gamma_1 - 36\gamma_1^2 + 108g_2\right)\wp(a) + \\
& + 27(\gamma_1\zeta(a) - \gamma_0)^2 + \left(\frac{\beta_1^3}{2} + 9\beta_1\gamma_1\right)(\gamma_1\zeta(a) - \gamma_0) - \\
& - \gamma_1^2\left(\frac{\beta_1^2}{4} + 4\gamma_1\right) - 216g_3 \ ;
\end{aligned}
$$

$$K_1 = 324\wp^2(a) - 18(\beta_1^2 + 12\gamma_1)\wp(a) + 6\gamma_1(\beta_1^2 + 6\gamma_1) + \frac{\beta_1^4}{4} - 108\, g_2 \;;$$

$$K_2 = 216[2\wp'(a) - \beta_1\wp(a) + \gamma_1\zeta(a) - \gamma_0] + 36\beta_1\gamma_1 + 2\beta_1^3 \,.$$

Ekvationen (46) ger i allmänhet trenne olika värden på v, hvarefter de motsvarande ϱ-värdena erhållas ur uttrycket för den gemensamma roten till (43) och (44) nemligen:

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ r_0 & r_1 & r_2 \\ 0 & r_0 & r_1 \end{vmatrix} \cdot \varrho = - \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_3 \\ r_0 & r_1 & 0 \\ 0 & r_0 & r_2 \end{vmatrix}$$

d. v. s.

$$(47)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left\{ 36\wp(v+a) + 18\wp(a) - \frac{\beta_1^2}{2} - 6\gamma_1 \right\} \varrho = \\ &= 9\wp'(v) - 18(v,a)\wp(v) + 6\beta_1\wp(v+a) + \\ &+ \left(\frac{\beta_1^2}{2} - 36\wp(a) + 6\gamma_1\right)(v,a) + 9\big(3\wp'(a) + \gamma_1\zeta(a) - \gamma_0\big) + \frac{\beta_1\gamma_1}{2} \,. \end{aligned} \right.$$

Förutsatt således att de tre rötterna v_1, v_2, v_3 till ekvationen (46) äro olika, så erhålla vi de motsvarande ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 ur (47), och *differentialekvationen*

$$y''' - [\alpha_0 + 3\zeta(u-a) - 3_1\zeta(u)]y'' + [\beta_0 + \beta_1\zeta(u-a) - \beta_1\zeta(u)]\,y' +$$
$$+ [\gamma_0 + \gamma_1\zeta(u-a) - \gamma_1\zeta(u)]y = 0 \;,$$

der

$$\beta_1 = 2[\alpha_0 - 3\zeta(a)]$$

$$\gamma_1 = 6\wp(a) + \beta_1\zeta(a) - \beta_0 \;,$$

har alltså till fullständig integral

$$y = C_1 \frac{\sigma(u+v_1)}{\sigma(v_1)\sigma(u)} e^{[\varrho_1 - \zeta(v_1)]u} + C_2 \frac{\sigma(u+v_2)}{\sigma(v_2)\sigma(u)} e^{[\varrho_2 - \zeta(v_2)]u} +$$
$$+ C_3 \frac{\sigma(u+v_3)}{\sigma(v_3)\sigma(u)} e^{[\varrho_3 - \zeta(v_3)]u} \,.$$

Slutligen hafva vi att behandla det fall, som uppstår, då vi sätta

$$\beta_2 = 3\ ,$$

hvarvid vi erhålla

$$(48)\ \ldots\ldots \quad \begin{cases} \beta_1 = 2[\alpha_0 - 3\zeta(a)] \\ \gamma_1 = 3\wp(a) + \beta_1\zeta(a) - \beta_0 \end{cases}$$

samt ur (42) och (41)

$$(49)\ \ldots\ldots\ldots \quad \beta_1\gamma_2 - 3\gamma_1 + \gamma_2^2 = 0\ ;$$

och

$$(50)\quad \begin{cases} \varrho = -\left(\frac{\gamma_2}{3} + (v\,, a)\right)\ ; \\ \varrho^3 - \frac{\beta_1}{2}\varrho^2 - (3\wp(v) + \gamma_1)\varrho + \frac{\beta_1}{2}\wp(v) - \wp'(v) + \\ \qquad + (\beta_1 + \gamma_2)\wp(a) - \gamma_1\zeta(a) + \gamma_0 = 0\ ; \end{cases}$$

hvilka vid elimination af ϱ gifva

$$\wp'(v) - 2(v\,, a)\wp(v) + (v\,, a)\wp(v + a) + (v\,, a)\wp(a) +$$
$$+ \left(\gamma_2 + \frac{\beta_1}{2}\right)\wp(v + a) + \frac{\gamma_2^3}{27} + \frac{\beta_1\gamma_2^2}{18} - \frac{\gamma_1\gamma_2}{3} - \frac{\beta_1}{2}\wp(a) +$$
$$+ \gamma_1\zeta(a) - \gamma_0 = 0\ .$$

Emellertid är, som lätt synes, $v = 0$ ett regulärt ställe till venstra membrum, betraktadt såsom en dubbelperiodisk funktion af v; eliminationsresultatet kan således skrifvas under den enklare formen

$$(51)\ \ldots\ L_0 + (2\gamma_2 + \beta_1)\wp(v + a) - \wp'(v + a) = 0\ ,$$

der

$$27L_0 = 27\left(\wp'(a) - \beta_1\wp(a) + 2\gamma_1\zeta(a) - 2\gamma_0\right) + \beta_1\gamma_2^2 - 12\gamma_1\gamma_2\ .$$

Denna ekvation (51) och den första af ekvationerna (50) gifva nu i allmänhet trenne skilda värdepar v, ϱ och vi finna således, att *differentialekvationen*

$$y''' - [\alpha_0 + 3\zeta(u-a) - 3\zeta(u)]\,y'' + [\beta_0 + \beta_1\zeta(u-a) + 3\wp(u-a) -$$
$$- \beta_1\zeta(u)]\,y' + [\gamma_0 + \gamma_1\zeta(u-a) + \gamma_2\wp(u-a) - \gamma_1\zeta(u)]\,y = 0$$

der

$$\beta_1 = 2[\alpha_0 - 3\,\zeta(a)]$$
$$\gamma_1 = 3\wp(a) + \beta_1\zeta(a) - \beta_0$$

och γ_2 uppfyller vilkoret

$$\gamma_2^2 + \beta_1\gamma_2 - 3\gamma_1 = 0$$

har till fullständig integral

$$y = C_1\,\frac{\sigma(u+v_1)}{\sigma(v_1)\sigma(u)}\,e^{[\varrho_1-\zeta(v_1)]u} + C_2\,\frac{\sigma(u+v_2)}{\sigma(v_2)\sigma(u)}\,e^{[\varrho_2-\zeta(v_2)]u} +$$
$$+ C_3\,\frac{\sigma(u+v_3)}{\sigma(v_3)\sigma(u)}\,e^{[\varrho_3-\zeta(v_3)]u},$$

der $v_1\varrho_1$, $v_2\varrho_2$, $v_3\varrho_3$ äro de nyssnämda värdeparen.

Af de betraktade differentialekvationernas klass (III) finnes således af tredje ordningen trenne olika typer, hvilka hafva sin allmänna integral af rationel karaktär med det enda oändlighetsstället $u = 0$ inom eller på den primitiva periodparalellogrammen.